30.11.2022

Adı-Soyadı:

Numarası:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ ARASINAV SORULARI

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+4+\sqrt{x^2+4}}dx$ **has olmayan integralinin değerini bulunuz.**

2) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-\sqrt{x}}dx$ **has olmayan integralinin türünü ve karakterini belirleyiniz.**

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!.2^n}{n^{n+1}.(n+1)}$ **serisinin karakterini belirleyiniz.**

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$ **serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.**

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. Bu durumda** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}$ **serisinin de yakınsak olacağını uygun bir test kullanarak gösteriniz.**

6) $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1+x^n}{1+nx}$ **ile tanımlı** (f_n) **fonksiyon dizisinin** $[0,1]$ **kapalı aralığı üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.**

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2nx)}{nx^2+n^7}$ **fonksiyon serisinin** $\mathbb{R}$ **üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.**

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^2}(x-1)^n$ **kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.**

Not: 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlı, süre 90 dakikadır.

Dr. Nilay DEĞİRMEN

ANALİZ III ARASINAV CEVAP ANAHTARI

1) $$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+4+\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+4}\,(\sqrt{x^2+4}+1)}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x}{\sqrt{x^2+4}\,(\sqrt{x^2+4}+1)}\,dx$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{x^2+4}+1=u\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=du\end{gathered}}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_3^{\sqrt{R^2+4}+1} \frac{du}{u}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln u\,\Big|_3^{\sqrt{R^2+4}+1}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln(\sqrt{R^2+4}+1)-\ln 3 = \infty$$

2) $$\int_2^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-\sqrt{x}}\,dx$$

1. tip has olmayan integral ve

$f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-\sqrt{x}}$ olmak üzere $f(x)>0$ dır.

Bölüm testi uygulayalım. $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ seçelim.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^{3/2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x^{3/2}}} = 1\in(0,\infty)$$

olduğundan $\int_2^\infty f(x)\,dx$ ile $\int_2^\infty g(x)\,dx$ aynı karakterdedir.

$\int_2^\infty g(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, $(p=2>1)$ p-testi gereği yakınsak

olduğundan $\int_2^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-\sqrt{x}}\,dx$ has olmayan integrali de yakınsaktır.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\cdot 2^n}{n^{n+1}\cdot(n+1)}$ pozitif terimli seri

$a_n = \dfrac{n!\cdot 2^n}{n^{n+1}\cdot(n+1)}$ oran testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+2}\cdot(n+2)} \cdot \frac{n^{n+1}\cdot(n+1)}{n!\cdot 2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}\cdot \cancel{2^n}\cdot 2}{(n+1)^{n+1}\cdot \cancel{(n+1)}\cdot(n+2)} \cdot \frac{n^{n+1}\cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}\cdot \cancel{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2\cdot 1\cdot e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \left(\dfrac{n}{2n+5}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+5}\right)^n$ pozitif terimli

$a_n = \left(\dfrac{n}{2n+5}\right)^n$ Kök testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+5}\right)^n$ serisi yakınsak ve dolayısıyla

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\left(\dfrac{n}{2n+5}\right)^n$ serisi mutlak yakınsaktır.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri $\left(\lim_{n\to\infty} b_n = 0\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{n^2}$ serisinin karakterini belirlemek için Bölüm testini

kullanalım.

$a_n = \dfrac{b_n}{n^2}$ ve $c_n = \dfrac{1}{n^2}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b_n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsak

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{n^2}$ serisi de yakınsaktır

6) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1+x^n}{1+nx}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^n}{1+nx} = \begin{cases} 1 & , \quad x=0 \\ 0 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad x=1 \end{cases} = f(x)$$

$f_n \to f$ N.Y.

Her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $[0,1]$ aralığında sürekli

Ancak $f(0)=1$ ve $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ olduğundan f, $x=0$ da

sürekli değildir. Dolayısıyla yakınsama düzgün olamaz.

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2nx)}{nx^2+n^7}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\arctan(2nx)}{nx^2+n^7} \right| = \frac{|\arctan(2nx)|}{nx^2+n^7} < \frac{\frac{\pi}{2}}{nx^2+n^7} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^7} = M_n$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^7} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$ serisi $(p=7>1)$ p-testi gereği yakınsak olduğundan Weierstrass M-testi gereği verilen fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^2} (x-1)^n$

$a_n = \dfrac{3^n}{1+n^2}$, $x_0 = 1$

$$R = \overline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \overline{\lim} \frac{\cancel{3^n}}{1+n^2} \cdot \frac{1+(n+1)^2}{\cancel{3^{n+1}}_{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{Yakınsaklık yarıçapı}$$

Verilen kuvvet serisi $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ açık aralığında yakınsaktır.

$x = \frac{2}{3}$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^2} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ serisi elde edilir.

Bu seri Leibnitz testi gereği yakınsaktır.

$x = \frac{4}{3}$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^2} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisi elde edilir.

$\dfrac{1}{1+n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisi de yakınsaktır.

Böylece yakınsaklık kümesi $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ kapalı aralığıdır.